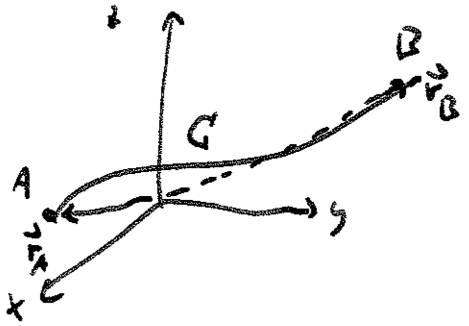
II. Integration in mehreren Veränderlichen & in allg. Koord. systemen

- Linienintegrale (Pfade, Integration entlang von Trajektorien)
- Oberflächenintegrale (Flüsse)
- Volumenintegrale (Ladungen)
- Integralsätze
- Geometrische, koord.-unabhängige Def. von div, grad, rot.

1.) Linien-Integrale.

Φ = Skalares Feld.

$\vec{A}$ = Vektorfeld.



Typische Linienintegrale: $\int_C \Phi\, d\vec{r}$, $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$, $\int_C \vec{A}\times d\vec{r}$.

= Vektor $\qquad$ = Skalar $\qquad$: Vektor (axial!)

besonders häufig in der Physik.

Der Pfad C sei unterteilt in $N \gg 1$ kleine (gerade) Linienelemente $d\vec{r}_p$, $p = 1, \dots, N$. (x_p, y_p, z_p) sein die Koordinaten von Punkten auf dem Linienelement $d\vec{r}_p$

$$\Rightarrow \int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{p=1}^{N} \vec{A}(x_p, y_p, z_p)\cdot d\vec{r}_p .$$

(wir nehmen an, dass $|d\vec{r}_p| \to 0$ mit $N \to \infty$ für alle p.)

Bem: Der Pfad kann geschlossen sein, B = A. Dann schreiben wir $\oint_C$ statt $\int_C$.

Bem: Häufig ist der Pfad C durch Parametrisierung gegeben,

$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\,\hat{e}_x + y(\lambda)\,\hat{e}_y + z(\lambda)\,\hat{e}_z$, λ Parameter, z.B. Zeit t.;

oder der Pfad wird durch simultane Gleichungen von x, y, z gegeben, deren Lösungsmenge C ist (z.B. $C = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} = R_0^2\}$.

Bem: $\int_C$ hängt von C ab.

$\int_{C_1} \neq \int_{C_2}$ im allgemeinen.

$\oint_C$ benötigt Orientierung. Wir wählen die gegen den Uhrzeigersinn laufende:

Damit ist die eingeschlossene Region R immer zur Linken.

Berechnung: Reduktion auf gewöhnliche, einfache Integrale.

Kartes. Koord: $d\vec{r} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z$.

$$\Rightarrow \int_C \Phi\, d\vec{r} = \underbrace{\hat{e}_x \int_C \Phi(x,y,z)\,dx + \hat{e}_y \int_C \Phi(x,y,z)\,dy + \hat{e}_z \int_C \Phi(x,y,z)\,dz}_{\text{drei Standardintegrale}}.$$

Mit $\vec{A} = A^i \hat{e}_i$ $\Rightarrow$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C (A^i \hat{e}_i)\cdot(dx^j \hat{e}_j)$$
$$= \int_C A^i dx^j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)$$
$$= \int_C A^i dx^j \delta_{ij}$$
$$= \int_C A^i dx_i$$
$$= \int_C A_x dx + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz$$

In kartesischen Koordinaten sind $\{\hat{e}_i\}$ und $\{\hat{e}^i\}$ gleich, also auch die kontra- und kovarianten Komponenten A^i und A_i.

Analog für

$$\int_C \vec{A}\times d\vec{r} = \int_C (A^i \hat{e}_i)\times(dx^j \hat{e}_j) = \cancel{\int_C A^i dx^j \hat{e}}$$
$$= \int_C A^i dx^j \varepsilon_{ij}{}^{k}\, \hat{e}_k .$$
$$= \int_C \Big[(A^1 dx^2 - A^2 dx^1)\hat{e}_3 + (A^2 dx^3 - A^3 dx^2)\hat{e}_1 + (A^3 dx^1 - A^1 dx^3)\hat{e}_2 \Big]$$

$\varepsilon_{ij}{}^{k}$ ist vollständig antisymmetrisch, d.h. wechselt Vorzeichen bei Vertauschen von Indizes. Wir definieren $\varepsilon_{12}{}^{3} = 1$. In kart. Koord. ist $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ij}{}^{k}$ etc.

Rechenregeln: C ist Pfad von A nach B

$-C$ ist Pfad von B nach A

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{A}\cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{-C} \vec{A}\cdot d\vec{r}.$$

Orientierung

$$\oint_{-C} \vec{A}\cdot d\vec{r} = -\oint_{C} \vec{A}\cdot d\vec{r}.$$

C nun Pfad von A über P nach B, C_1 geht von A nach P, C_2 geht von P nach B

$$\Rightarrow \int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^P \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_P^B \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

Additivität

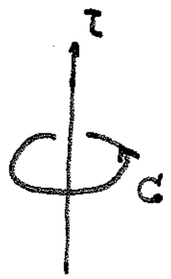
Physikal. Bsp.:

- Eine Kraft $\vec{F}$ bewegt einen Massepunkt m von A nach B entlang Pfad C. Die verrichtete Arbeit ist

$$W_C = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- Eine Ladung q wird in einem elektrostat. Feld $\vec{E}$ von A nach B entlang Pfad C bewegt. Die gewonnene elektrostat.-Potentialenergie ist

$$W_C = -q\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r}.$$



- Ampere-Gesetz: Durch einen Draht fließe Strom I. Dies induziert eine magnet. Feldstärke $\vec{B}$. Der Zusammenhang zwischen I und $\vec{B}$ ist

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I,$$ wobei C senkrecht zur Stromflussrichtung liegt.

- Eine Drahtschleife C sei von einem Strom I durchflossen. Befindet sich diese in einem magnetostat. Feld $\vec{B}$, dann wirkt auf ein Drahtstück $d\vec{r}$ die Kraft $d\vec{F} = I\, d\vec{r}\times\vec{B}$.

$$\Rightarrow \vec{F} = I\oint_C d\vec{r}\times\vec{B}.$$ Lorentzkraft.

Parametrisierung: $d\vec{r}$ für $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}\, d\lambda$$

Parametrisierung ~~mit~~ der Bogenlänge ds:

$$ds = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Weitere Linien-Integrale sind $\int \Phi\, d\vec{r}$, $\int \vec{A}\, ds$.

orthogonale Koordinaten $\{u_i\}$, Skalenfaktoren $\{h_i\}$:

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^{3} (h_i)^2 (du_i)^2$$

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (h_i)^2 \left(\frac{du_i}{d\lambda}\right)^2}\, d\lambda .$$

Greensche Satz in der Ebene:

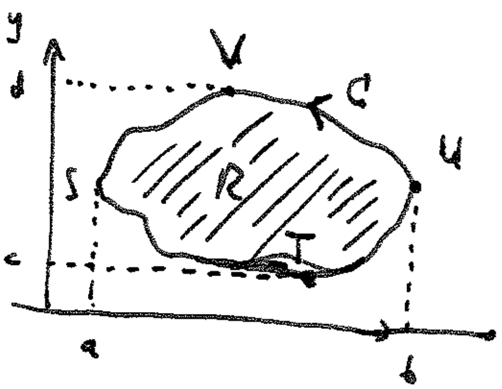
C geschlossene Kurve, die ein Gebiet R einschließt / berandet!

$\partial R = C$.

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ sowie sämtliche ihrer partielle Ableitungen seien eindeutig und stetig in R und auf C. R sei einfach zshgd.

$$\Rightarrow \oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy .$$

Bew:



Kurve STU: $y = y_1(x)$

SVU: $y = y_2(x)$

TSV: $x = x_1(y)$

TUV: $x = x_2(y)$

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, \frac{\partial P}{\partial y} = \int_a^b dx \left[P(x,y) \right]_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}$$

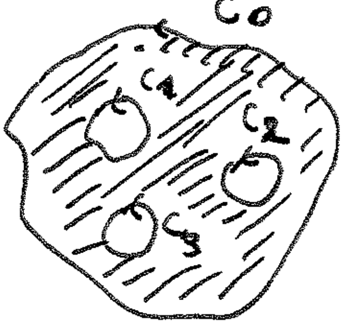
$$= \int_a^b \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right] dx = -\int_a^b P(x, y_1(x))\, dx - \int_b^a P(x, y_2(x))\, dx$$

$$= -\oint_C P\,dx$$

Analog: $\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \frac{\partial Q}{\partial x} = \dots = \int_c^d [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]\,dy$

$$= \int_d^c Q(x_1(y),y)\,dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

Differenz der beiden Ausdrücke ergibt Green's Theorem.



$$\int_R dx\,dy\,(\partial_x Q - \partial_y P) = \oint_{C_0} (P\,dx + Q\,dy) - \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} (P\,dx + Q\,dy)$$

Wichtige Anwendung: Pfade mögen alle in einer Ebene liegen.

$$I_i = \int_A^B (P\,dx + Q\,dy)\Big|_{C_i} \quad \text{entlang zweier Pfade } C_1, C_2$$

$C = C_1 - C_2$ ist ein geschlossener Pfad.

$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = 0 \Rightarrow$ I hängt nicht von Wahl des Pfades ab.

Hinreichende Bedingung: $\frac{\partial}{\partial y} P = \frac{\partial}{\partial x} Q$ in einfach zshgd. Gebiet R, das C enthält.
(die part. Abl. müssen außerdem in R stetig sein.)

Es gilt: Diese Bed. ist auch notwendig.
Sie ist äquivalent zu der Voraussetzung, dass $P\,dx + Q\,dy$ ein exaktes Differential einer Fkt $\phi(x,y)$ ist, $d\phi = P\,dx + Q\,dy$.

$\Rightarrow \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$ unabh. vom Pfad der Integration,

$\oint d\phi = 0$. (alles in R)

2. Konservative Felder & Potentiale

Wir betrachten $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$, C ein Pfad von A nach B.

Def: Ein Vektorfeld $\vec{A}$ mit $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{A}\cdot d\vec{r}$ unabhängig vom Pfad, der A mit B verbindet, heißt konservativ.

Satz: Ein Vektorfeld $\vec{A}$ mit stetigen part. Abl. in einem Gebiet R (einf. zshgd.) ist konservativ $\Leftrightarrow$

1) $\int_A^B \vec{A}\cdot d\vec{r}$ hängt nicht von Wahl des Pfades ab, $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset R$.

$\Leftrightarrow$ 2) $\exists$ eindeutige Fkt $\Phi(\vec{r})$: $\vec{A} = \nabla\Phi$.

$\Leftrightarrow$ 3) $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = 0$

$\Leftrightarrow$ 4) $\vec{A}\cdot d\vec{r}$ ist ein exaktes Differential.

Bew: klar. (Nutze $d\Phi = \nabla\Phi\cdot d\vec{r}$ Def. des Gradienten, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Phi = \nabla\times(\nabla\Phi) = 0$, ...)

Def. Ein Vektorfeld $\vec{A}$ sei konservativ. Dann heißt Φ mit $\vec{A} = \nabla\Phi$ das skalare Potential des konserv. Vektorfeldes $\vec{A}$.
Φ ist eindeutig bis auf eine bel. additive Konstante.

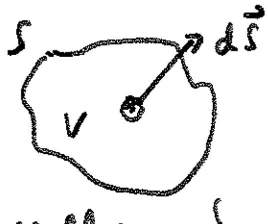
Bem: Ein Vektorfeld $\vec{B}$ mit $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ ($\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, solenoidal) hat ein Vektorpotential $\vec{A}$ mit $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ ($\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$).
$\forall\, \psi$ skalare Fkt. und $\forall\, \vec{c}$ konstanter Vektor gilt:
$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi + \vec{c}$ erfüllt ebenfalls $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}'$, ist also auch ein Vektorpotential.

3. Oberflächenintegrale

$\int_S \Phi \, dS$ S offen oder geschlossen, dann: $\oint_S \Phi \, dS$.

$d\vec S = \hat n \, dS$ Vektor-Flächenelement

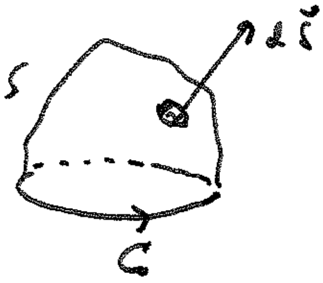
$\hat n$ Normalenvektor an der "Stelle" dS.



geschlossenes S

$\hat n$ zeigt nach außen

(V muss nicht einf. zshgd. sein, z.B. V = Torus)



offenes S, $\hat n$ bildet mit Umlaufsinn von C ein rechts-händiges System.

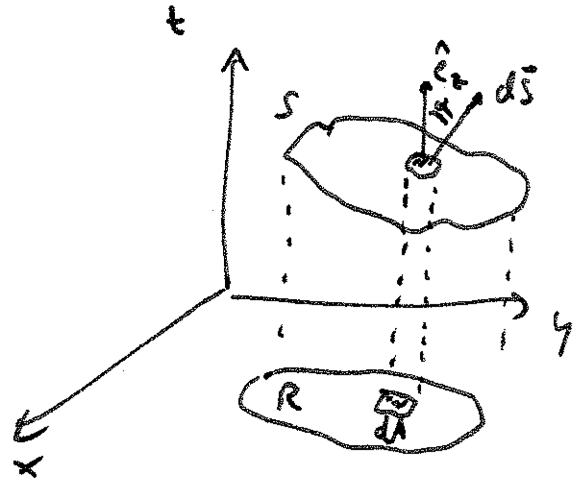
Typische Integrale: $\int_S \Phi \, d\vec S$, $\int_S \vec A \cdot d\vec S$, $\int_S \vec A \times d\vec S$.

S muss nicht einf. zshgd. sein, aber zweiseitig (orientierbar), also kein Möbiusband

Zerlege S in $N \geq 1$ Elemente dS_p, $p = 1, \ldots, N$ mit jeweiligen Normalenvektor $\hat n_p$. Sei (x_p, y_p, z_p) die Punkte in dS_p.

$$\Rightarrow \text{z.B.} \quad \int_S \vec A \cdot d\vec S = \lim_{N \to \infty} \sum_{p=1}^{N} \vec A(x_p, y_p, z_p) \cdot \hat n_p \, dS_p$$

wobei alle $dS_p \to 0$ mit $N \to \infty$.



$$dS = \frac{dA}{|\cos\alpha|} = \frac{dA}{|\hat n \cdot \hat e_z|}$$

Sei S gegeben als die Nullstellenmenge $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow \hat n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

$$\Rightarrow dS = \frac{dA}{|\hat n \cdot \hat e_z|} = \frac{|\nabla f| \, dA}{\nabla f \cdot \hat e_z} = \frac{|\nabla f| \, dA}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Somit lässt sich ein Oberflächenintegral auf eine Doppelintegration in der Ebene zurückführen.

Vektorflächen von Oberflächen:

$$\vec S = \int_S d\vec S = \int_S \hat n \, dS$$

$|\vec S|$ ist nicht die Oberfläche sondern die Fläche, die vom Rand von S eingeschlossen wird (für offene Flächen)

Für geschlossene Flächen gilt $\oint d\vec S = \vec 0$.

genauer hängt $\vec S$ nur von der Randkurve C ab.

Denn: Seien S_1 und S_2 verschiedene Fläche mit Rand C.

$\Rightarrow$ $S_1 - S_2$ ist geschlossen. $\oint d\vec S = \int_{S_1} d\vec S - \int_{S_2} d\vec S = 0$.

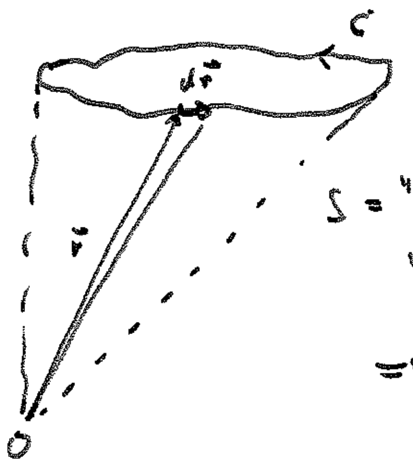
$\Rightarrow \vec S_1 = \vec S_2$.

Für gegebenes C als Randkurve können wir $\vec S$ daher als Linienintegral über C schreiben:

S beliebig. wir wählen "Kegel".

$d\vec S = \frac{1}{2} \vec r \times d\vec r$

↑ Dreieck!



S = "Kegel" mit Spitze im Ursprung, Rand C.

$$\Rightarrow \vec S = \frac{1}{2} \oint_C \vec r \times d\vec r$$

Beispiele

- Raumwinkel einer Fläche (vom Ursprung)

$$\Omega = \int_S \frac{\vec r \cdot d\vec S}{r^3} = \int_S \frac{1}{r^2} \hat r \cdot \hat n \, dS .$$

- Fluss eines Vektorfeldes $\vec A$ durch S $\int_S \vec A \cdot d\vec S$.
- Elektromag. Fluss von Energie aus Volumen V mit Oberfläche S:

$$W = \oint_S (\vec E \times \vec H) \cdot d\vec S .$$

4. Volumenintegrale:

$$\int_V \Phi \, dV, \quad \int_V \vec{A} \, dV .$$

z.B. $M = \int_V \rho(\vec{r}) \, dV$ Gesamtmasse

$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \, dV$ gesamter Impuls

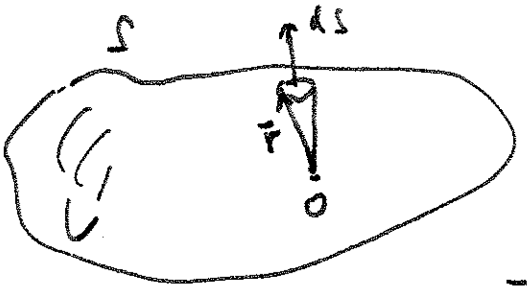
} einer Flüssigkeit im Vol. V, $\vec{v}(\vec{r})$ Geschwindigkeitsfeld.

Starrer Körper rotiere mit $\vec{\omega}$.

$$\vec{L} = \int_V (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \rho \, dV = \int_V \vec{\omega} \, r^2 \rho \, dV - \int_V (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \rho \, dV$$

$\left(\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \right.$

Gesamtdrehimpuls.



$dV = \frac{1}{3} \vec{r} \cdot d\vec{S}$
↑ Kegel

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$ drückt Volumen durch Oberflächenintegral aus!

$= \int_V dV .$

5. Grad, Div, Rot

Koord.-unabhängige Definition:

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \oint_S \Phi \, d\vec{S} \right)$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \right)$$

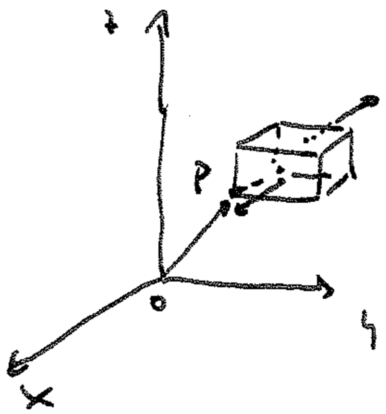
$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \oint_S d\vec{S} \times \vec{A} \right)$$

Bew: • Für grad, Vergleich zum Ausdruck in kart. Koord.

Sei $dV = dx\,dy\,dz$.

Die Flächen mit $x = \text{const}$ haben $d\vec S = -\hat e_x\, dy\, dz$

und $d\vec S = \hat e_x\, dy\, dz$



Φ kann also auf jeder Fläche (infinitesimal!) konstant angenommen werden.

Der Wert sei Φ und $\Phi + d\Phi = \Phi + \frac{\partial}{\partial x}\Phi\, dx$.

$$\left((\Phi + d\Phi) - \Phi\right) dy\, dz\, \hat e_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\, \hat e_x$$

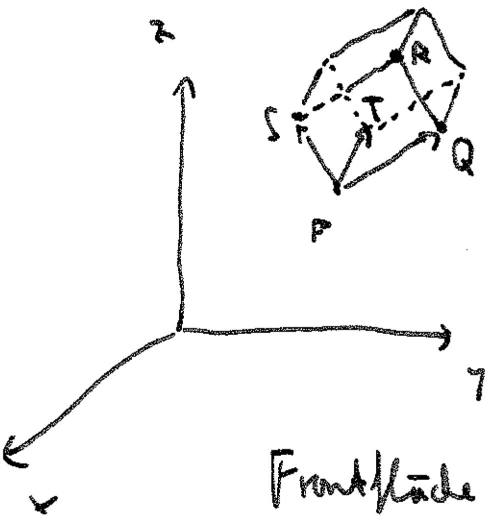
alle 6 Flächen

$$\Rightarrow \oint_S \Phi\, d\vec S = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat e_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat e_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat e_z\right)\underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} \Phi = \lim_{dx,dy,dz\to 0}\left(\frac{1}{dx\,dy\,dz}\oint_S \Phi\, d\vec S\right)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat e_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat e_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat e_z \quad ✓$$

• Für $\operatorname{div}\vec A$ in orthog. krummlin. Koord.



$\vec{PT} = h_1\, du_1\, \hat e_1$

$\vec{PS} = h_2\, du_2\, \hat e_2$

$\vec{PQ} = h_3\, du_3\, \hat e_3$

$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3$

$\vec A = A^i \hat e_i$

$u_1 = \text{const}$:

Frontfläche R S / P Q : $d\vec S = h_2 h_3\, du_2\, du_3\, \hat e_3 \times \hat e_2$

$= -h_2 h_3\, du_2\, du_3\, \hat e_1$.

$$\Rightarrow \int_{PQRS + \text{Rückseite}} \vec A \cdot d\vec S = \vec A(u_1 + du_1, u_2, u_3)\cdot d\vec S - \vec A(u_1, u_2, u_3)\cdot d\vec S$$

$$= \vec A(u_1 + du_1, \ldots)\, h_2 h_3\, du_2\, du_3 \cdot \hat e_1(u_1 + du_1, \ldots) - \vec A(u_1, \ldots)\, h_2 h_3\, du_2\, du_3 \cdot \hat e_1(u_1, \ldots)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_1}(\vec{A}\cdot d\vec{s})\, du_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}(A^1 h_2 h_3)\, du_1\, du_2\, du_3$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A^1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A^2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A^3 h_1 h_2)\right]}_{}\, du_1\, du_2\, du_3$$

$h_i = h_i(\{u_j\})$!

$\hat{e}_i = \hat{e}_i(\{u_j\})$ werden in erster Ordnung konstant gehalten!

$$\vec{A}(u_1+du_1, \dots)\, h_2(u_1+du_1, \dots)\, h_3(u_1+du_1, \dots)\, du_2\, du_3\, \hat{e}_1$$
$$- \vec{A}(u_1, \dots)\, h_2(u_1, \dots)\, h_3(u_1, \dots)\, du_2\, du_3\, \hat{e}_1$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A^1 h_2 h_3)\, du_1\, du_2\, du_3 + O((du_1)^2)\right]$$